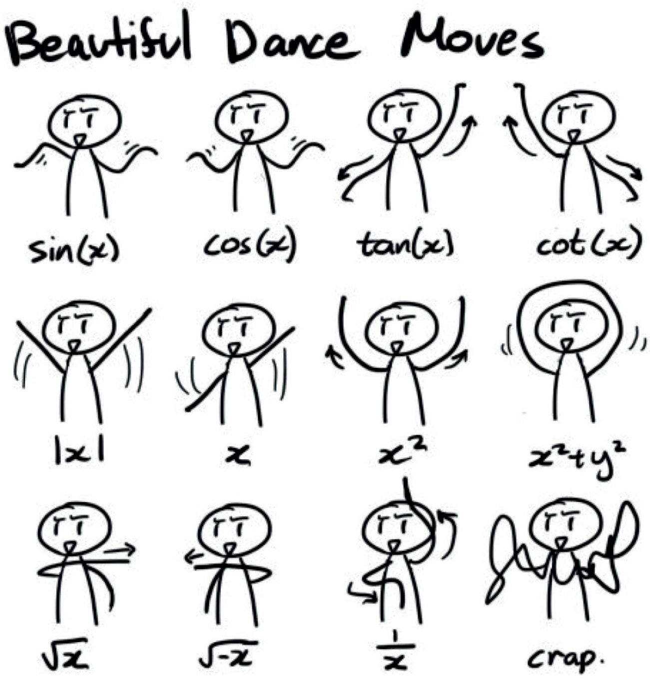
M. Bianchi, G. Messineo, E. Miglierina, S. Vassallo

Note di matematica



Giappichelli

Elenco delle tabelle

Prefazione

Scrivere la prefazione ad un manuale che presenti i contenuti di un corso introduttivo di matematica tipico di corsi di laurea a "bassa intensità" matematica o, perlomeno, così ritenuti nell'opinione comune, richiede di porsi tre domande e cercare di dare loro una risposta.

La prima domanda è: perché la matematica è un corso così diffuso tra i più svariati corsi di laurea, da Economia a Scienze Politiche, da Biologia a Scienze Naturali? E perché il corso di Matematica è all'inizio del primo anno di università? La risposta a questa domanda potrebbe essere l'oggetto di un libro a sé ma qui ci limiteremo a dire che la matematica fornisce un linguaggio in qualche modo universale e unificante per molte discipline anche radicalmente diverse tra loro. La matematica permette infatti di formulare modelli che descrivono aspetti della realtà e aiutano a spiegarne le caratteristiche anche in ambiti lontani da quelli più consueti come possono essere la Fisica o l'Ingegneria. Insomma, la matematica fornisce un modo di esprimere diversi aspetti della realtà e, accanto a questo, fornisce un metodo di pensiero, basato sull'astrazione per meglio capire la realtà e sul procedere logico del ragionamento (per questo motivo nel libro molti risultati sono seguiti dalla loro dimostrazione, che spesso non si ha il tempo necessario per trattare in aula). Per chiudere la risposta a questa prima domanda vale la pena di citare la medaglia Fields Timothy Gowers, che scriveva in un suo piccolo volume di introduzione alla matematica: "Volendo affermare che questo libro contenga un messaggio, il messaggio è che occorre imparare a pensare in modo astratto, perché così facendo molte difficoltà filosofiche svaniscono", dove per difficoltà filosofiche Gowers intendeva quelle resistenze a guardare la matematica senza pregiudizi che portano così spesso gli studenti e non solo a non sentirsi a proprio agio con questa disciplina.

La seconda domanda, forse prosaica, ma abbastanza naturale è: perché, data la presenza sul mercato di molti, e ottimi, manuali per un corso introduttivo di matematica, scriverne un altro? La risposta è duplice. Da una parte, è un modo per offrire agli studenti dei nostri corsi un materiale meditato e esposto in modo organico, con l'ambizione anche che qualche collega possa trovare qualche utile spunto per la sua attività didattica. Dall'altra, è un modo per fare il punto sulla nostra esperienza didattica dopo anni di insegnamento di questa materia; un modo per condensare in una forma, come dicevamo sopra, meditata e organica, che vada oltre quella di mere dispense, la somma di tutte le esperienze, i pensieri, le meditazioni, gli errori da noi commessi e da ultimo, ma non ultimo, il nostro rapporto con migliaia di studenti, spesso curiosi, a volte in difficoltà, e con molti colleghi, spesso prodighi di ottimi esempi e suggerimenti.

L'ultima domanda, la più ovvia, ma certo di grande importanza: cosa c'è in questo libro? La risposta in forma sintetica potrebbe essere: tutta la matematica che devono conoscere studenti che affrontano percorsi di studio riguardanti discipline sociali, economiche o biologiche. Più in dettaglio gli argomenti contenuti nel manuale sono suddivisi in sette capitoli. Nel primo capitolo vengono gettate le basi di tutto ciò che verrà poi, o meglio, viene descritto gli ambienti in cui si svilupperanno tutti i risultati successivi: l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Segue un secondo capitolo dedicato ai primi rudimenti di algebra lineare con l'introduzione delle matrici e il loro uso per lo studio dei sistemi lineari di equazioni. Il terzo capitolo è dedicato alla nozione di funzione e all'esposizione delle proprietà fondamentali di funzioni reali, sia di una che di più variabili reali (con particolare riguardo alle funzioni di due variabili reali). Il Capitolo 4 introduce la nozione di limite e mostra come questo strumento sia utile per affrontare una proprietà fondamentale delle funzioni reali di una o più variabili reali: la continuità. I Capitoli 5 e 6 presentano, rispettivamente, il calcolo differenziale e il calcolo integrale (integrale di Riemann) per funzioni reali di variabile reale e le loro applicazioni, con particolare riguardo, nel capitolo 5, al problema di individuare punti di massimo e minimo di una funzione. Chiude il volume in Capitolo 7 che presenta un cenno al calcolo differenziale per funzioni di due variabili reali e alle sue applicazioni a problemi di ottimizzazione, sia liberi che vincolati.

Vorremo chiudere questa breve prefazione con una celebre espressione del fisico Eugene Wigner che intitolò un suo articolo: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, espressione che suoni come un augurio per tutti i nostri lettori, che mettano alla prova, dopo aver superato l'esame di matematica, l'*unreasonable effectiveness of Mathematics* in campi sempre nuovi.

Gli autori ringraziano di cuore Carlo De Bernardi per il prezioso contributo dato durante tutta la preparazione di questo libro, per gli utilissimi suggerimenti e per la lettura attenta del manoscritto di questo volume.

Gli Autori

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 *Introduzione*

Uno sviluppo rigoroso dell'analisi matematica è possibile solo se ambientata in un insieme numerico con opportune proprietà quale è l'insieme dei numeri reali. In questo capitolo daremo una idea intuitiva di numero reale e ci soffermeremo sulle fondamentali nozioni di estremo superiore ed inferiore. Proseguiremo presentando alcune nozioni introduttive sul concetto generale di funzione. L'argomento sarà poi approfondito nel successivo Capitolo 3 dove saranno discusse in maggior dettaglio le funzioni reali in una o due variabili reali. Parleremo poi di una particolare struttura algebrica, gli spazi vettoriali, e più in dettaglio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, costituito dalla n-ple ordinate di numeri reali, che sarà fondamentale nello studio della risolubilità dei sistemi lineari trattati nel Capitolo 2. Introdurremo inoltre la struttura di spazio metrico e le nozioni topologiche correlate alla nozione di intorno. Anche in questo caso, ci soffermeremo sul caso particolare dello spazio metrico $\mathbb{R}^n$ perché funzionale al seguito della trattazione.

1.2 *Una idea intuitiva di numero reale*

In questo paragrafo introdurremo il concetto di numero reale. Nel secolo scorso illustri matematici quali Dedekind e Cantor, si sono dedicati alla costruzione formale dell'insieme di tali numeri, ma per i nostri scopi è sufficiente darne una idea intuitiva. Cominciamo quindi ricordando quali sono i principali insiemi numerici. Si noti che ogni insieme nasce in modo naturale come un ampliamento del precedente:

(1) $\mathbb{N}$ rappresenta l'insieme dei *numeri naturali*:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

(2) $\mathbb{Z}$ rappresenta l'insieme dei *numeri interi* (o *relativi*):

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

(3) $\mathbb{Q}$ rappresenta l'insieme dei *numeri razionali*:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Soffermandoci sull'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, elenchiamo brevemente le principali proprietà delle operazioni di somma e prodotto e della relazione d'ordine $\leq$ definite in $\mathbb{Q}$ ($a, b, c, \ldots$ indicano generici numeri razionali):

Q1) *Proprietà commutativa della somma*: $a + b = b + a, \ \forall a, b$;

Q2) *Proprietà associativa della somma*: $(a + b) + c = a + (b + c), \ \forall a, b, c$;

Q3) *Elemento neutro della somma*: esiste un elemento detto *zero* e indicato con 0 tale che: $a + 0 = a, \ \forall a$;

Q4) *Elemento inverso per la somma*: $\forall a$, esiste un elemento detto *opposto* di a e indicato con $-a$ tale che $a + (-a) = 0$;

Q5) *Proprietà commutativa del prodotto*: $a \cdot b = b \cdot a, \ \forall a, b$;

Q6) *Proprietà associativa del prodotto*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \ \forall a, b, c$;

Q7) *Elemento neutro del prodotto*: esiste un elemento detto *unità* e indicato con 1 tale che: $a \cdot 1 = a, \ \forall a$;

Q8) *Elemento inverso per il prodotto*: $\forall a \neq 0$, esiste un elemento detto *reciproco* di a e indicato con a^{-1}, oppure $\frac{1}{a}$, tale che $a \cdot a^{-1} = 1$;

Q9) *Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma*: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \ \forall a, b, c$;

Q10) *Compatibilità dell'ordinamento con la somma*: se $a \leq b$ allora $a + c \leq b + c, \ \forall c$;

Q11) *Compatibilità dell'ordinamento con il prodotto*: se $a \leq b$ e $c > 0$ allora $a \cdot c \leq b \cdot c$.

Un insieme dotato di due operazioni e di una relazione d'ordine che soddisfano le precedenti proprietà Q1-Q11 si dice *campo ordinato*. Possiamo quindi affermare che l'insieme dei numeri razionali è un esempio di campo ordinato.

Le operazioni elementari di *differenza* e *divisione* possono essere definite utilizzando gli elementi inversi della somma e del prodotto come segue

$$a - b = a + (-b); \quad a : b = \frac{a}{b} = a \cdot (b^{-1}), \ b \neq 0.$$

Una ulteriore importante proprietà dei numeri razionali è la *densità*:

Q12) dati due numeri razionali $a, \ b$ con $a < b$, esiste sempre un numero razionale c tale che $a < c < b$

dove l'ordine stretto $a < b$ significa $a \leq b, \ a \neq b$.

Un numero che soddisfa proprietà Q12) è, ad esempio, la media aritmetica $\frac{a+b}{2}$ dei due numeri $a,\ b$ ma, in realtà, esistono infiniti numeri razionali che soddisfano tale proprietà.

L'insieme dei numeri razionali non è invece *completo*. Questo, in termini geometrici intuitivi, significa che l'insieme dei numeri razionali non può essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata, cioè esistono punti di una retta orientata che non corrispondono a numeri razionali. Ad esempio, se costruiamo un quadrato di lato unitario, come in Figura 1.1, e riportiamo con un compasso, centrato nell'origine 0 e ampiezza pari alla diagonale del quadrato (la cui lunghezza è per il teorema di Pitagora uguale a $\sqrt{2}$), il punto P lungo l'asse reale, individuiamo un punto sulla retta che si può dimostrare non corrispondere ad alcun numero razionale. Per ovviare a questo problema, che precluderebbe un rigoroso

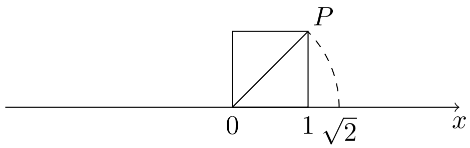


Figura 1.1. Incompletezza di $\mathbb{Q}$.

fondamento di molti risultati dell'analisi matematica, l'insieme dei numeri razionali è stato ampliato definendo l'insieme dei *numeri reali*. Come anticipato, vogliamo solo dare una idea intuitiva di numero reale partendo dalla osservazione che ogni numero razionale può essere rappresentato con un numero decimale limitato (cioè con un numero finito di cifre dopo la virgola) o illimitato periodico e viceversa. Sono quindi numeri razionali [1]

$$0{,}123 \qquad 0{,}\overline{123} = 0{,}123123123\ldots \qquad 0{,}1\overline{23} = 0{,}1232323\ldots$$

mentre non è razionale il numero decimale illimitato ottenuto scrivendo in sequenza tutti i numeri naturali:

$$0{,}12345678910111213141516\ldots$$

Altri esempi di noti numeri non razionali sono $\sqrt{2}$, $\pi = 3{,}141592\ldots$, $e = 2{,}718281\ldots$ [2].

[1] I numeri decimali periodici possono essere trasformati in frazioni con regole di calcolo note dalle scuole medie superiori. Ad esempio $0,1\overline{23} = \frac{122}{990}$.

[2] Il numero *e*, detto numero *e* di Nepero, sarà di frequente utilizzato nei successivi capitoli.

Chiamiamo allora *numero reale* un qualsiasi numero decimale sia limitato che illimitato. L'insieme dei numeri reali si indica con $\mathbb{R}$ ed è l'unione dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ (allineamenti decimali limitati o periodici) con i numeri irrazionali (allineamenti decimali illimitati non periodici).

Le operazioni di somma e prodotto definite in $\mathbb{Q}$ possono essere estese nell'insieme dei numeri reali e continuano a valere in $\mathbb{R}$ tutte le proprietà $Q1) - Q12)$ valide in $\mathbb{Q}$. Inoltre, a differenza di $\mathbb{Q}$, l'insieme dei numeri reali è completo e quindi i numeri reali possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata di origine O, corrispondente al numero 0. Definita una unità di misura

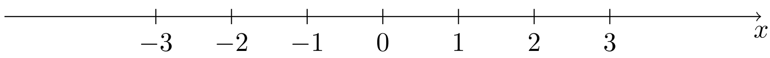


Figura 1.2. La retta reale.

dei segmenti, si associa al numero reale α il punto A della retta orientata a destra dell'origine O se $\alpha > 0$, a sinistra di O se $\alpha < 0$, di lunghezza pari a $\overline{OA} = |\alpha|$ dove $|\alpha|$ indica il *modulo* (o *valore assoluto*) di α:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Osserviamo che per costruzione

$$|\alpha| > 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0 \text{ e } |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Possiamo quindi concludere che l'insieme dei numeri reali è un *campo ordinato completo*. Nel successivo Paragrafo 1.2.1 riprenderemo la proprietà di completezza mostrandone un concetto equivalente.

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è l'insieme numerico nel quale verranno ambientati i concetti esposti nei successivi paragrafi e capitoli. Introduciamo le seguenti notazioni utili nel seguito della trattazione:

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$: numeri reali diversi da zero;
- $\mathbb{R}^+$: insieme dei numeri reali positivi;
- $\mathbb{R}_0^+$: insieme dei numeri reali non negativi;
- $\mathbb{R}^-$: insieme dei numeri reali negativi;
- $\mathbb{R}_0^-$: insieme dei numeri reali non positivi.

Infine, nel Capitolo 4 sarà necessario considerare l'insieme dei *numeri reali esteso* aggiungendo ad $\mathbb{R}$ i simboli $+\infty$ e $-\infty$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

dove $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

1.2.1 *Insiemi limitati in* $\mathbb{R}$

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come $\mathbb{R}$ sia un insieme ordinato rispetto alla usuale relazione d'ordine $\leq$. Vediamo ora quali sono le proprietà che caratterizzano una relazione d'ordine.

Definizione 1.2.1. Dato un generico insieme X, introdurre un *ordinamento* in X significa introdurre una relazione $\leq$ tra le coppie di elementi di X che goda delle seguenti proprietà:

- *proprietà riflessiva*: $x \leq x$ per ogni $x \in X$;
- *proprietà antisimmetrica*: $x \leq y$ e $y \leq x$ implica $x = y$;
- *proprietà transitiva*: $x \leq y$ e $y \leq z$ implica $x \leq z$.

Due elementi $x,y \in X$ si diranno *confrontabili* se $x \leq y$ oppure $y \leq x$. In particolare se tutte le coppie di elementi di X sono costituite da elementi confrontabili, l'ordinamento si dice *completo,* in caso contrario *parziale*.

In base alla precedente definizione, possiamo allora essere più precisi e dire che $\mathbb{R}$ è un insieme *totalmente* ordinato poiché è sempre possibile confrontare due numeri reali qualsiasi α e β rispetto alla relazione d'ordine $\leq$.

Osservazione 1.2.2. Non tutti gli insiemi ordinati sono totalmente ordinati. Consideriamo, ad esempio, un insieme generico X e l'insieme $\mathscr{P}(X)$ delle parti di X costituito da tutti i sottoinsiemi di X. Dati $A, B \in \mathscr{P}(X)$, introduciamo la relazione d'ordine $\leq$ ponendo

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Lasciamo al lettore la verifica che la relazione introdotta è effettivamente una relazione d'ordine. In questo caso è però facile convincersi che l'ordine non è totale: due insiemi non vuoti A e B tali che $A \cap B = \emptyset$ non sono tra loro confrontabili.

La relazione d'ordine $\leq$ in $\mathbb{R}$, ci consente di introdurre le seguenti definizioni:

Definizione 1.2.3. Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

(1) A si dice *limitato superiormente* se esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq b, \quad \forall a \in A$$

e l'elemento b viene detto *maggiorante* di A;

(2) A si dice *limitato inferiormente* se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \geq c, \quad \forall a \in A$$

e l'elemento c viene detto *minorante* di A;

(3) Se A non ammette maggioranti si dice che è *illimitato superiormente*. Analogamente, se A non ammette minoranti si dice che è *illimitato inferiormente*;

(4) A si dice *limitato* se e solo se è limitato sia superiormente che inferiormente.

Quando un maggiorante o minorante di A appartengono all'insieme A, si dicono, rispettivamente, *massimo* o *minimo* di A. Si hanno dunque le seguenti definizioni:

Definizione 1.2.4. Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

(1) Un elemento $M \in A$ viene detto *massimo* di A se

$$a \leq M, \quad \forall a \in A$$

e si scrive $M = \max(A)$;

(2) Un elemento $m \in A$ viene detto *minimo* di A se

$$m \leq a, \quad \forall a \in A$$

e si scrive $m = \min(A)$.

Esempio 1.2.5. L'insieme

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{n} \,:\, n = 1, 2, \dots \right\}$$

risulta un insieme limitato essendo $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ per ogni $n = 1, 2, \dots$. Si ha inoltre $\max(A_1) = 1$.
L'insieme

$$A_2 = \{-n^2 \,:\, n = 1, 2, \dots\}$$

è illimitato superiormente, mentre è limitato inferiormente e si ha $\min(A_2) = -1$.

Esempi importanti di insiemi limitati in $\mathbb{R}$ sono descritti nella seguente definizione.

Definizione 1.2.6. (Intervalli reali limitati)
Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha < \beta$. I seguenti insiemi sono detti *intervalli* di estremi α e β:

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq \beta\} \qquad (\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\}$$

$$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq \beta\} \qquad [\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < \beta\}$$

Accanto agli intervalli limitati, possiamo inoltre definire i seguenti *intervalli illimitati* (superiormente o inferiormente):

$$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq \alpha\} \qquad (\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > \alpha\}$$

$$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \alpha\} \qquad (-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\}$$

Osserviamo che non necessariamente un insieme limitato superiormente (inferiormente) ammette massimo (minimo). Ad esempio il precedente insieme limitato

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{n} \,:\, n = 1, 2, \dots \right\}$$

ammette massimo ($\max(A_1) = 1$), mentre non ammette minimo. Infatti, il numero 0 è un minorante di A_1, ma non possiamo definirlo minimo in quanto non appartiene all'insieme A_1.

Un altro esempio: l'intervallo $I = (-\infty, \alpha)$ è limitato superiormente, ma non ammette massimo in quanto $\alpha \notin I$.

È del resto evidente che il numero 0 per l'insieme A_1, così come il numero α per l'intervallo I, sono un minorante, ed un maggiorante, molto particolari. Essi sono per la precisione il *massimo dei minoranti* ed il *minimo dei maggioranti*, rispettivamente. Formalizziamo quanto detto con le seguenti definizioni:

Definizione 1.2.7. Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$.

(1) Un numero reale L viene detto *estremo superiore* di A se
   (i) $a \leq L$ per ogni $a \in A$;
   (ii) $\forall \varepsilon > 0$ esiste $a_\varepsilon \in A : L - \varepsilon \leq a_\varepsilon \leq L$.

(2) Un numero reale l viene detto *estremo inferiore* di A se
   (i) $a \geq l$ per ogni $a \in A$;
   (ii) $\forall \varepsilon > 0$ esiste $a_\varepsilon \in A : l \leq a_\varepsilon \leq l + \varepsilon$.

Dalle definizioni è evidente che se l'estremo superiore o inferiore appartengono ad A, essi coincidono con il massimo o minimo di A, rispettivamente. Inoltre se A ammette estremo superiore (inferiore) allora A è limitato superiormente (inferiormente). Si può inoltre dimostrare il seguente fondamentale risultato:

Teorema 1.2.8. *Ogni insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente (inferiormente) ammette estremo superiore (inferiore).*

Il precedente teorema risulta di fatto equivalente alla completezza dei numeri reali[3] e non vale in $\mathbb{Q}$, dove, ad esempio l'insieme

$$\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$$

è limitato superiormente, ma non ammette estremo superiore.

Nel seguito indicheremo con il simbolo $\sup(A)$ l'estremo superiore di A con la convenzione che $\sup(A) = +\infty$ se A è illimitato superiormente. Analogamente indicheremo con il simbolo $\inf(A)$ l'estremo inferiore di A con la convenzione che $\inf(A) = -\infty$ se A è illimitato inferiormente.

Esempio 1.2.9.

E1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 7 \vee x \geq 9\}$. Allora $\inf(A) = 3$ ed A non ammette minimo. Inoltre A è illimitato superiormente e quindi $\sup(A) = +\infty$.

E2) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2(x+1) \leq 0\}$. Osserviamo che $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\} \cup \{0\}$. Allora $\max(A) = 0$ mentre A è illimitato inferiormente e quindi $\inf(A) = -\infty$.

1.3 *Definizione di funzione*

Il concetto di funzione nasce per "descrivere matematicamente una grandezza *variabile*" (si veda [4]). Prima di introdurne la definizione formale, consideriamo il seguente esempio:

Esempio 1.3.1. Immaginiamo che un'azienda, per la produzione di zucchero, sostenga un costo fisso di 30 euro e un costo al chilogrammo di 0,5 euro. Se l'azienda produce 100 kg di zucchero in una certa giornata, è immediato ricavare il costo totale di produzione, pari a $0{,}5 \cdot 100 + 30$, ovvero 80 euro.

Se indichiamo con q la quantità in kg di zucchero prodotta, possiamo ricavare la *legge* che ci consente di esprimere il costo di produzione in relazione a tale quantità: il costo

[3] Per approfondimenti si vedano, ad esempio, i testi [4], [12].

totale di produzione è pari al prodotto del costo al kg dello zucchero per la quantità q prodotta, a cui si somma il costo fisso. In formule:

$$C(q) = 0{,}5 \cdot q + 30$$

Ovviamente, poiché q è la quantità di zucchero prodotta, si ha $q \geq 0$.

L'esempio precedente mostra che la descrizione della grandezza variabile "costo totale di produzione" è espressa come relazione tra quest'ultima e la quantità q prodotta, ovvero implica che esista una *legge* che lega tra loro le due grandezze.

Inoltre, tale relazione ha la proprietà di essere *univoca*, ovvero ad ogni possibile valore di $q \geq 0$ è associato uno ed un solo valore del costo totale di produzione.

Esistono tuttavia anche relazioni non univoche, come ad esempio quella che illustriamo nel seguente esempio:

Esempio 1.3.2. Consideriamo una famiglia nella quale Arianna è madre di Antonio e Aurora mentre Bianca è madre di Beatrice, Brandon e Benedetta. La relazione che associa ad ogni madre i suoi figli non è univoca, perché all' "ingresso" Arianna corrispondono due "uscite", Aurora e Antonio, e così per Bianca, a cui corrispondono Beatrice, Brandon e Benedetta.

Possiamo allora dare la seguente definizione

Definizione 1.3.3. Una *funzione* f definita in un insieme A a valori in un insieme B

$$f : A \to B$$

è una legge che associa ad *ogni* elemento $a \in A$ un *unico* elemento $b \in B$ e si scrive:

$$b = f(a)$$

La scrittura

$$f : A \to B$$

si legge in questo modo: la funzione f è definita sull'insieme A e assume valori nell'insieme B oppure f è definita da A a B.

La funzione f esprime quindi la relazione che esiste tra gli elementi dell'insieme di partenza A e quelli dell'insieme di arrivo B.

A livello puramente intuitivo, è possibile pensare ad una funzione come ad una "scatola nera" che ad ogni possibile valore in ingresso a associa un unico valore in uscita $f(a)$ (si veda [4]), come mostrato nella Figura 1.3.

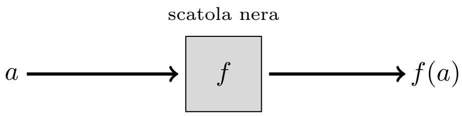


Figura 1.3. Rappresentazione di una funzione.

Osserviamo che la scrittura $f(a)$ indica il valore in uscita, quello che la funzione f associa all'elemento a di A, ed è diverso dal simbolo f, che indica invece la funzione stessa.

In base alla Definizione 1.3.3, la relazione dell'Esempio 1.3.1 è una funzione, perché ad ogni valore della quantità prodotta del bene è associato uno ed un solo valore del costo di produzione, mentre la relazione dell'Esempio 1.3.2 non lo è, perché ad ogni madre corrisponde più di un figlio.

1.3.1 *Generalità*

Si consideri una funzione $f : A \to B$. Di seguito elenchiamo alcuni termini che ricorrono nello studio delle funzioni.

(1) L'insieme A viene detto *dominio* o *campo di esistenza* della funzione;
(2) L'insieme B prende il nome di *codominio* della funzione:
(3) L'elemento $b = f(a)$ è detto *immagine* di a mediante f;
(4) Il sottoinsieme costituito dall'unione delle immagini degli elementi di A:

$$\mathrm{Im}(f) = f(A) = \{b \in B : \exists a \in A \text{ con } b = f(a)\} = \bigcup_{a \in A} \{f(a)\}$$

prende il nome di *insieme immagine* di f. In genere, $f(A)$ è un sottoinsieme proprio di B;
(5) Un elemento $a \in A$ tale che $b = f(a)$ viene detto *controimmagine* di b mediante f;
(6) L'insieme delle controimmagini di un elemento $b \in B$:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A : b = f(a)\}$$

viene detto *insieme controimmagine* di b mediante f. L' insieme $f^{-1}(b)$ è non vuoto se e solo se $b \in f(A)$ ed in questo caso può contenere un solo elemento o più elementi. Nel seguito, se $f^{-1}(b) = \{a\}$ useremo la notazione $f^{-1}(b) = a$;

(7) La controimmagine di un insieme $B_1 \subseteq B$ tramite f è un sottoinsieme del dominio A, che viene indicato con $f^{-1}(B_1)$, dato da

$$f^{-1}(B_1) = \{a \in A \mid f(a) \in B_1\} = \bigcup_{b \in B_1} \left\{f^{-1}(b)\right\}.$$

Illustriamo le definizioni appena date con alcuni esempi.

Esempio 1.3.4. Siano $A = \{\text{studenti della facoltà X dell'università Y}\}$ e $B = \mathbb{N}$. Si consideri la funzione $f : A \longrightarrow B$ che associa ad ogni studente il suo numero di matricola:

$$f(a) = \text{numero di matricola di } a.$$

Se lo studente Mario Rossi ha numero di matricola 1234567, allora

$$f(\text{Mario Rossi}) = 1234567$$

e

$$f^{-1}(1234567) = \text{Mario Rossi}$$

ovvero l'unico studente a cui è associato quel numero di matricola.

Consideriamo invece la funzione $g : A \longrightarrow B$ che associa ad ogni studente la somma delle cifre che formano il suo numero di matricola. Ora può capitare che a studenti differenti corrisponda lo stesso numero. Se ad esempio Mario Rossi ha la matricola 1234567 e Giuseppe Verdi 1326574, si ha

$$g(\text{Mario Rossi}) = g(\text{Giuseppe Verdi}) = 28$$

ed in questo caso

$$g^{-1}(28) = \{\text{Mario Rossi, Giuseppe Verdi}\}.$$

Esempio 1.3.5. Una azienda produce biciclette, sostenendo un costo unitario di produzione di 50 euro e costi fissi di 100 euro al giorno.

Se $n \in \mathbb{N}$ è il numero di biciclette prodotte in un giorno, la funzione $C : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$C(n) = 50n + 100$$

rappresenta il costo di produzione sostenuto dall'azienda al variare del numero di biciclette prodotto.

Se in un giorno l'azienda produce 1000 biciclette, il costo di produzione è 50100, ovvero $C(1000) = 50 \cdot 1000 + 100$. Inoltre

$$C^{-1}(25100) = 500$$

ovvero il numero di biciclette che dà luogo ad un costo di produzione di 25100 è pari a 500. Invece

$$C^{-1}(9920) = \emptyset$$

perché il costo di produzione è pari a 9920 se il numero di biciclette è pari a 196,4, valore non accettabile perché non esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $f(n) = 9920$.

Tra le diverse tipologie di funzioni che incontreremo nel seguito, ricordiamo:

- le *successioni reali,* funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$;
- le *funzioni reali di variabile reale,* funzioni $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- le *funzioni reali di più variabili reali,* funzioni $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$;
- le *funzioni a valori vettoriali di più variabili reali,* funzioni $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

dove l'insieme $\mathbb{R}^n$, che verrà descritto in dettaglio nel successivo Paragrafo 1.4, rappresenta il prodotto cartesiano $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R}}_{\text{n-volte}}$.

1.3.2 *Funzioni iniettive, suriettive, biiettive*

Si consideri una funzione $f : A \to B$. Gli Esempi 1.3.4 e 1.3.5 mettono in evidenza che, scelto $b \in B$, possono presentarsi tre situazioni differenti:

- $f^{-1}(b) = \emptyset$ (b non ammette controimmagini);
- $f^{-1}(b) = a$ (b ammette una sola controimmagine);
- $f^{-1}(b) = \{a_1, a_2, \ldots\}$ (b ammette più di una controimmagine).

Possiamo introdurre quindi le seguenti definizioni:

Definizione 1.3.6. La funzione f si dice *iniettiva* se ogni elemento di B ammette al più una controimmagine, ossia se per ogni $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ o contiene un solo elemento oppure è vuoto.

In modo alternativo, si può affermare che una funzione è iniettiva se per ogni $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ si ha $f(a_1) \neq f(a_2)$, o se vogliamo, in modo equivalente,

$$a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Definizione 1.3.7. La funzione f si dice *suriettiva* se ogni elemento di B ammette almeno una controimmagine, ossia se per ogni $b \in B$ l'insieme $f^{-1}(b)$ non è vuoto.

In modo alternativo, si può affermare che f è suriettiva se, per ogni $b \in B$, esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$, cioè se ogni elemento del codominio è immagine di un elemento del dominio. Osserviamo che questa condizione equivale a richiedere che $f(A) = B$.

Osserviamo inoltre che tutte le funzioni possono essere rese suriettive cambiando l'insieme di arrivo, cioè considerandole a valori in $f(A)$.

Definizione 1.3.8. La funzione f si dice *biiettiva* se per ogni $b \in B$, $f^{-1}(b)$ contiene esattamente un elemento, ossia se ogni elemento di B ammette esattamente una controimmagine.

Una funzione f è quindi biiettiva se e solo se è iniettiva e suriettiva.

Per le funzioni biettive possiamo definire la *funzione inversa* come segue

Definizione 1.3.9. Sia $f : A \to B$ biettiva. Allora definiamo

$$f^{-1} : B \to A$$

ponendo

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

Esempio 1.3.10.

E1) La funzione f dell'Esempio 1.3.4, che associa ad ogni studente il suo numero di matricola, è iniettiva, ma non suriettiva, perché a studenti diversi corrispondono numeri di matricola diversi, ma non tutti i numeri naturali sono numeri di matricola di uno studente. La funzione g dello stesso esempio, non è invece iniettiva (e neanche suriettiva).

E2) Sia A l'insieme delle persone residenti in Lombardia e B l'insieme dei comuni lombardi. La funzione $f : A \to B$ che associa ad ogni residente il suo comune di residenza è una funzione suriettiva, ma non iniettiva.

1.3.3 *Prolungamenti e restrizioni*

Consideriamo una funzione $f : A \to B$. In alcuni casi è necessario restringere f ad un sottoinsieme del suo dominio A, mentre in altri casi estendere f in punti non appartenenti al dominio A. Nascono in questo modo le restrizioni e i prolungamenti di f che definiamo di seguito.

Definizione 1.3.11. Sia $A_1 \subset A$. Una funzione $g : A_1 \to B$, tale che

$$g(a) = f(a), \forall a \in A_1$$

viene detta *restrizione* di f all'insieme A_1.

È anche possibile usare la notazione $g = f_{|A_1}$.

Definizione 1.3.12. Sia $A \subset A_2$. Una funzione $h : A_2 \longrightarrow C$ tale che

$$h(a) = f(a), \forall a \in A$$

viene detta *prolungamento* di f in A_2.

Esempio 1.3.13.

E1) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 50x + 100$. In questo caso, $y = 125$ ha una controimmagine, $x = \frac{1}{2}$.
Considerando invece la sua restrizione $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, g(n) = 50n + 100$, $y = 125$ non ha controimmagini, perché $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

E2) Un soggetto possiede una somma S con cui può offrire pizza e birra agli amici. La pizza costa 10 euro e la birra 4 euro. Il costo che il soggetto sostiene è:

$$c(x, y) = 10x + 4y;\ \ x, y \geq 0$$

dove x è il numero di pizze e y è il numero di birre che offre.
La funzione $c(x, y)$ è *teoricamente* definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ma in realtà non è così: x e y sono numeri naturali e devono soddisfare la condizione $10x + 4y \leq S$. Anche in questo caso, abbiamo una restrizione della funzione c all'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 10x + 4y \leq S\}$$

E3) Sia $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, data da $f(x) = \frac{1}{x}$. La funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

è un prolungamento della funzione f. Osserviamo che $A_2 = \mathbb{R} \supseteq A = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1.3.4 *Grafico di una funzione*

Data una funzione $f : A \longrightarrow B$, il sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$

$$G(f) = \{(a, b) \in A \times B : a \in A, b = f(a)\}$$

viene detto *grafico* di f.

Osserviamo che non tutti i sottoinsiemi di $A \times B$ sono però grafici di funzioni. Infatti se f è una funzione, per ogni elemento $a \in A$ esiste un unico elemento $b \in B$ tale che $(a, b) \in G(f)$. Al grafico di una funzione non possono quindi appartenere punti distinti con la prima componente uguale.

Esempio 1.3.14.

E1) Sia $A = \{\text{rosso, blu, bianco, nero, verde}\}$, $B = \mathbb{N}$ ed f la funzione che associa ad ogni elemento $a \in A$ il numero di lettere che compongono a:

$$f(a) = \text{numero di lettere di } a$$

Si ha

$$f(\text{rosso}) = 5,\ f(\text{blu}) = 3,\ f(\text{nero}) = 4,\ f(\text{verde}) = 5, f(\text{bianco}) = 6$$

Il grafico di f è quindi l'insieme delle coppie ordinate

$$G(f) = \{(\text{rosso}, 5), (\text{blu}, 3), (\text{bianco}, 6), (\text{nero}, 4), (\text{verde}, 5)\}$$

E2) Siano $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$ e $f : A \longrightarrow B$, definita da

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Il grafico della funzione f è

$$G(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y = \frac{1}{2}x + 1\right\}$$

ed è rappresentato nella Figura 1.4.

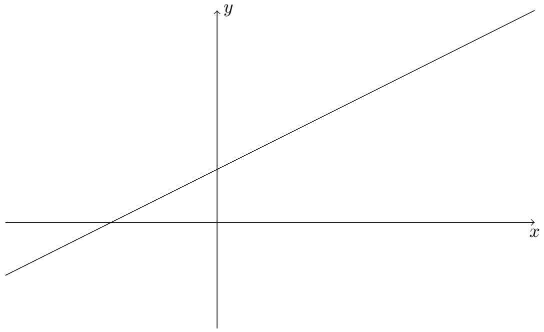


Figura 1.4. Il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

E3) Sia

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x, y) = 2(x^2 + y^2)\mathrm{e}^{(-x^2-y^2)}$$

Il suo grafico è

$$G(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2, z = 2(x^2 + y^2)\mathrm{e}^{(-x^2-y^2)}\right\}$$

ed è rappresentato nella Esempio 1.5.

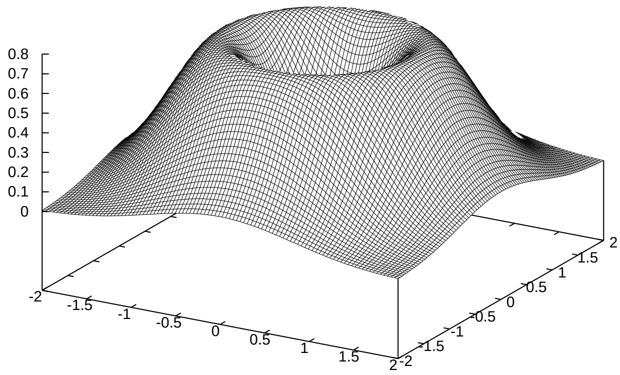


Figura 1.5. Il grafico della funzione $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)e^{(-x^2-y^2)}$.

1.4 *Spazi vettoriali reali*

Si consideri un insieme $\mathcal{V}$ e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, nel seguito denominati anche *scalari*. Si dice che $\mathcal{V}$ è uno *spazio vettoriale* (o *spazio lineare*) *reale* se in esso sono definite due operazioni

$$(1)\ + : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad (u, v) \mapsto u + v, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$$
$$(2)\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad (a, u) \mapsto a \cdot u, \quad \forall u \in \mathcal{V}, \forall a \in \mathbb{R}$$

denominate, rispettivamente, *somma* e *prodotto esterno (o moltiplicazione per uno scalare)*, che godono delle seguenti proprietà:

V1) *Proprietà commutativa della somma*: $u + v = v + u, \ \forall u, v \in \mathcal{V}$;

V2) *Proprietà associativa della somma*: $u + (v + w) = (u + v) + w, \ \forall u, v, w \in \mathcal{V}$;

V3) *Elemento neutro della somma*: esiste $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ tale che $u + 0_{\mathcal{V}} = u, \ \forall u \in \mathcal{V}$;

V4) *Elemento inverso per la somma*: $\forall u \in \mathcal{V}$ esiste un elemento, detto *opposto* di u ed indicato con $-u$, tale che $u + (-u) = 0_{\mathcal{V}}$;

V5) *Proprietà distributiva del prodotto esterno rispetto alla somma*: $k \cdot (u + v) = k \cdot u + k \cdot v, \ \forall u, v \in \mathcal{V}, \forall k \in \mathbb{R}$;

V6) *Proprietà distributiva della somma di scalari rispetto al prodotto esterno*: $(k+h) \cdot u = k \cdot u + h \cdot v, \ \forall k, h \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{V}$;

V7) *Proprietà associativa del prodotto esterno*: $k \cdot (h \cdot u) = (kh) \cdot u, \ \forall k, h \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{V}$;

V8) *Compatibilità con l'elemento neutro del prodotto in* $\mathbb{R}$: $1 \cdot u = u, \ \forall u \in \mathcal{V}$.